

МЕЖДУНАРОДНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
29.04.2021

Задание 1 (5 баллов)

Вычислить $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{2021}$.

Задание 2 (10 баллов)

Найдите наименьшее значение функции $u = 4x - 6y + 12z - 5$ на множестве $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} + \frac{z^2}{5^2} = 1$.

Задание 3 (9 баллов)

Вычислить сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n!}.$$

Задание 4 (5 баллов)

Вычислить предел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{4} \cdot \dots \cdot \cos \frac{x}{2^n} \right).$$

Задание 5 (5 баллов)

Доказать, что объем параллелепипеда, построенного на диагоналях граней данного параллелепипеда, равен удвоенному объему данного параллелепипеда.

Задание 6 (6 баллов)

Вычислить

$$\int_{1/a}^a \frac{\ln x}{1+x^2} dx.$$

Задание 7 (5 баллов)

Функция определена и удовлетворяет соотношению:

$$(x-1)f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - f(x) = x$$

при всех $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$. Найти все такие функции.

Задание 8 (9 баллов)

Решить дифференциальное уравнение

$$y'' \cos x + y'(5 \cos x - 2 \sin x) + y(3 \cos x - 5 \sin x) = e^{-x}.$$

Задание 9 (5 баллов)

Доказать, что

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot \dots \cdot \frac{99}{100} < \frac{1}{10}.$$

Задание 10 (11 баллов)

Вычислить интеграл

$$I = \int \frac{x^2 dx}{(\sin x - x \cos x)^2}.$$

Задание 11 (8 баллов)

Числа p и q случайно выбраны на отрезках $[2, 6]$, $[0, 4]$ соответственно. Найти вероятность того, что корни уравнения $x^2 + px + q = 0$ действительные и различные.

Задание 12 (9 баллов)

Решить задачу Коши:

$$xyy'' - x(y')^2 = 2yy', \quad y(1) = e, \quad y'(1) = 3e.$$

Задание 13 (7 баллов)

Докажите, что многочлен

$$P(x) = x^n \sin \varphi - \rho^{n-1} x \sin n\varphi + \rho^n \sin(n-1)\varphi$$

делится на

$$x^2 - 2\rho x \cos \varphi + \rho^2.$$

Задание 14 (6 баллов)

Решить дифференциальное уравнение:

$$y' + 2ye^x - y^2 = e^{2x} + e^x.$$