



第三届国际数学奥林匹克竞赛
布拉戈维申斯克-俄罗斯·2023年3月25日

1. (本题8分)

解方程组

$$\begin{cases} x + \frac{3x - y}{x^2 + y^2} = 3, \\ y - \frac{x + 3y}{x^2 + y^2} = 0. \end{cases}$$

2. (本题10分)

抛物线 $y = -(x^2/12) + x - 16/3$ 的一条切线与函数 $y = 3|x + 6| - 7/3$ 的图象交于 A 、 B 两点。若点 $C(-6; -7/3)$ 满足 $\angle CAB = 2\arccos(3/\sqrt{10}) + \angle CBA$ ，求 $\triangle ABC$ 的外接圆半径。

3. (本题9分)

矩阵 $A_{3 \times 2}$ 和 $B_{2 \times 3}$ 满足

$$AB = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

求出矩阵 BA 。

4. (本题11分)

求微分方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{y^3 + x^2y + x^2}$$

的通解。

5. (本题10分)

计算极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \right).$$

6. (本题11分)

求级数

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{10^n}$$

的和, 其中数列 $\{u_n\}$ 由递推公式:

$$u_0 = 1, u_1 = 2, u_2 = 4, u_{n+1} = u_{n-2} + 2u_{n-1} + u_n, n \geq 2 \text{ 确定.}$$

7. (本题9分)

甲乙丙丁四人依次轮流掷一枚硬币, 每次硬币朝上或朝下的概率都是0.5。最先掷出硬币朝上的人将成为唯一获胜者。

求四人分别成为胜者的概率。

8. (本题13分)

计算定积分

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(a + b \cos^2 x)^2} \quad (a > 0, b > 0).$$

9. (本题10分)

求线性微分方程组

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{x} - 2x - \ddot{y} + 4\dot{y} = 0 \\ 2\dot{x} + x - \ddot{y} - 4\dot{y} + 2y = 0 \end{cases}$$

的通解。

10. (本题9分)

计算曲线积分

$$\oint_{\Gamma} \frac{x dy + y dx}{x^2 + y^2}, \quad \Gamma = \{(x, y): (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1\}.$$