

国际奥林匹克数学竞赛

29.04.2021

1. (本题5分)

计算 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{2021}$.

2. (本题10分)

在点集 $\{(x,y,z) \mid \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} + \frac{z^2}{5^2} = 1\}$ 中求函数 $u = 4x - 6y + 12z - 5$ 的最小值。

3. (本题9分)

求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n!}$ 的和函数。

4. (本题5分)

计算极限: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{4} \cdot \dots \cdot \cos \frac{x}{2^n} \right)$.

5. (本题5分)

给定一个平行六面体, 从任一顶点都可引出三条面对角线。求证: 以这些面对角线为棱所构建的平行六面体的体积是原平行六面体的 2 倍。

6. (本题6分)

计算定积分:

$$\int_{1/a}^a \frac{\ln x}{1+x^2} dx.$$

7. (本题5分)

已知方程 $(x-1)f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - f(x) = x$ 对任意的 $x \in \mathbb{R}, x \neq 1$ 均成立, 求出所有满足上述条件的函数 $f(x)$ 。

8. (本题 9 分)

求微分方程 $y'' \cos x + y'(5 \cos x - 2 \sin x) + y(3 \cos x - 5 \sin x) = e^{-x}$ 的通解。

9. (本题 5 分)

证明不等式

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdots \frac{99}{100} < \frac{1}{10}.$$

10. (本题 11 分)

计算不定积分 $I = \int \frac{x^2 dx}{(\sin x - x \cos x)^2}$.

11. (本题 8 分)

设 p 和 q 分别是闭区间 $[2, 6], [0, 4]$ 中的数。求方程 $x^2 + px + q = 0$ 有两个不相等实根的概率。

12. (本题 9 分)

求解柯西方程:

$$xyy'' - x(y')^2 = 2yy', \quad y(1) = e, \quad y'(1) = 3e.$$

13. (本题 7 分)

证明: 多项式 $P(x) = x^n \sin \varphi - \rho^{n-1} x \sin n\varphi + \rho^n \sin(n-1)\varphi$ 能被 $x^2 - 2\rho x \cos \varphi + \rho^2$ 整除。

14. (本题 6 分)

求解微分方程: $y' + 2ye^x - y^2 = e^{2x} + e^x$.