**ВТОРАЯ МЕЖДУНАРОДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА**
**БЛАГОВЕЩЕНСК – РОССИЯ, 19 марта 2022**

**THE SECOND INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD**
**Blagoveshchensk – Russia, 19 March 2022**

**第二届国际数学奥林匹克竞赛**
**布拉戈维申斯克-俄罗斯，2022年3月19日**

***Формулировки задач и решения***

***Задание 1* (9 баллов)**
Определить количество нулей функции
$$f(x) = 2e^{2-x^2}(x^6 - 3x^4 + 5x^2 - 1) - 2e - 5, \quad x \in R.$$

**Ответ:** функция $f(x)$ имеет четыре (4) нуля.

**Решение:**

Функция $f(x)$ четная, поэтому достаточно рассмотреть интервал $x \geq 0$. Здесь количество нулей функции $f(x)$ совпадает с количеством нулей функции
$$g(t) = 2e^{2-t}(t^3 - 3t^2 + 5t - 1) - 2e - 5.$$
Рассмотрим
$$g'(t) = 2e^{2-t}(-t^3 + 6t^2 - 11t + 6) = -2e^{2-t}(t-1)(t-2)(t-3).$$
Отсюда определяем интервалы монотонности функции $g(t)$:
$(0,1), (2,3)$ – интервалы возрастания; $(1,2), (3,+\infty)$- интервалы убывания.
Проверяем значения функции $g(t)$ в точках экстремума:
$$g(0) = -2e^2 - 2e - 5 < 0,$$
$$g(1) = 4e - 2e - 5 > 0,$$
$$g(2) = 10 - 2e - 5 < 0,$$
$$g(3) = 28e^{-1} - 2e - 5 < 0.$$
Последнее неравенство вытекает из
$$28 - 2e^2 - 5e < 28 - 2(2{,}7)^2 - 5 \cdot 2{,}7 < 0.$$
Отсюда следует, что непрерывная функция $g(t)$ имеет нули на интервалах $(0,1)$ и $(1,2)$ – всего два нуля. Соответственно, непрерывная функция $f(x)$ будет иметь всего четыре (4) нуля на интервалах $\left(-\sqrt{2}, -1\right), (-1,0), (0,1), \left(1,\sqrt{2}\right)$.

---

***Задание 2*** ***(12 баллов)***
Вычислить

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x}(A^n - E)\right),$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{x}{n} \\ -\dfrac{x}{n} & 1 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Ответ:** $E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

**Решение:**

Представим

$$A = \frac{x}{n}E_1 + E$$

и заметим

$$E_1^2 = E_1 \cdot E_1 = -E,\ \ E_1^3 = -E_1,\ E_1^4 = E,\ E_1^5 = E_1, \dots$$

Тогда

$$A^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k E_1^k \left(\frac{x}{n}\right)^k = E \cdot \sum_{k=0}^{k\le\frac{n}{2}} (-1)^k C_n^{2k}\left(\frac{x}{n}\right)^{2k} + E_1 \cdot \sum_{k=0}^{k\le\frac{n}{2}} (-1)^k C_n^{2k+1}\left(\frac{x}{n}\right)^{2k+1};$$

Учитывая, что при $n \to \infty$

$$u_k = C_n^k\left(\frac{x}{n}\right)^k,\quad \left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| = \frac{C_n^{k+1}}{C_n^k}\frac{|x|}{n} = \frac{(n-k)|x|}{(k+1)n} \to \frac{|x|}{k+1},$$

все ряды сходятся как ряды Лейбница при $|x| < 1$.

Поэтому

$$\frac{1}{x}(A^n - E) = E_1 + \left(\frac{x}{n}\right)^2 E_1 \cdot \sum_{k=1}^{k\le\frac{n}{2}} (-1)^k C_n^{2k+1}\left(\frac{x}{n}\right)^{2k-2} + \frac{x}{n}\cdot E \cdot \sum_{k=1}^{k\le\frac{n}{2}} (-1)^k C_n^{2k+1}\left(\frac{x}{n}\right)^{2k-1} \to E_1$$

при $x \to 0$.

---

***Задание 3*** ***(10 баллов)***
Дана функция

$$f(x) = \frac{a^{2x}}{a^{2x} + a}, \qquad a > 0,\ \ x \in R.$$

Найти сумму

$$f(0) + f\left(\frac{1}{2022}\right) + f\left(\frac{2}{2022}\right) + f\left(\frac{3}{2022}\right) + \cdots + f\left(\frac{2021}{2022}\right) + f\left(\frac{2022}{2022}\right).$$

**Ответ:** $\dfrac{2023}{2}$

**Решение:**

Заметим

$$f(x) = \frac{a^{2x}}{a^{2x}+a} = 1 - \frac{a}{a^{2x}+a} = 1 - \frac{a^{2(1-x)}}{a^{2(1-x)}+a} = 1 - f(1-x),$$

то есть $f(x) + f(1-x) = 1$.

Тогда получаем

$$f(0) + f\left(\frac{1}{2022}\right) + f\left(\frac{2}{2022}\right) + f\left(\frac{3}{2022}\right) + \cdots + f\left(\frac{2021}{2022}\right) + f\left(\frac{2022}{2022}\right) =$$

$$\left[f(0) + f\left(\frac{2022}{2022}\right)\right] + \left[f\left(\frac{1}{2022}\right) + f\left(\frac{2021}{2022}\right)\right] + \left[f\left(\frac{2}{2022}\right) + f\left(\frac{2020}{2022}\right)\right] + \cdots$$

$$+\left[f\left(\frac{1009}{2022}\right) + f\left(\frac{1013}{2022}\right)\right] + \left[f\left(\frac{1010}{2022}\right) + f\left(\frac{1012}{2022}\right)\right] + f\left(\frac{1011}{2022}\right) =$$

$$= [f(0) + f(1-0)] + \left[f\left(\frac{1}{2022}\right) + f\left(1 - \frac{1}{2022}\right)\right] + \left[f\left(\frac{2}{2022}\right) + f\left(1 - \frac{2}{2022}\right)\right] + \cdots$$

$$+\left[f\left(\frac{1009}{2022}\right) + f\left(1 - \frac{1009}{2022}\right)\right] + \left[f\left(\frac{1010}{2022}\right) + f\left(1 - \frac{1010}{2022}\right)\right] + f\left(\frac{1}{2}\right) =$$

$$= 1011 \cdot 1 + \frac{a}{a+a} = 1011 + \frac{1}{2} = \frac{2023}{2}.$$

---

***<u>Задание 4</u> (9 баллов)***

Построить линию, заданную комплексным уравнением ($t$ – действительный параметр):

$$z \cdot \left(1 + e^{-it}\right)^2 = 1.$$

**Ответ:** $y^2 = \frac{1}{4} - x$.

**Решение:**

$$z\left(1 + e^{-it}\right)^2 = 1 \;\Rightarrow\; z\left(\frac{e^{i\frac{t}{2}} + e^{-i\frac{t}{2}}}{e^{i\frac{t}{2}}}\right)^2 = 1 \;\Rightarrow\; z = \frac{e^{it}}{4\cos^2\frac{t}{2}} = \frac{\cos t + i\sin t}{4\cos^2\frac{t}{2}} =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\left(1 - tg^2\frac{t}{2}\right) + 2i * tg\frac{t}{2}\right).$$

Обозначим

$$\tau = tg\frac{t}{2}, \quad \tau \in (-\infty, +\infty)$$

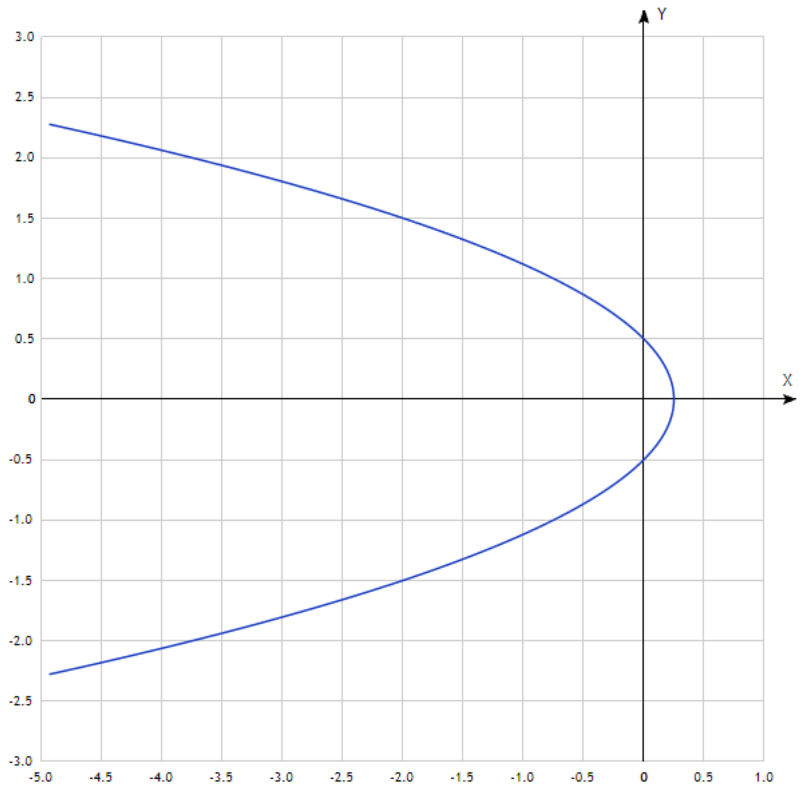
тогда

$$x = \frac{1}{4}\left(1 - tg^2\frac{t}{2}\right) = \frac{1}{4}(1 - \tau^2), \qquad y = \frac{1}{2}tg\frac{t}{2} = \frac{1}{2}\tau \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{1}{4}(1 - 4y^2),$$

или

$$y^2 = \frac{1}{4} - x$$

- уравнение параболы с вершиной в точке $(1/4; 0)$, ветви влево.




---

***Задание 5*** ***(9 баллов)***
Вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\int_1^n ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx.$$

**Ответ: 2**

**Решение:**

Используем правило Лопиталя:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\int_1^n ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{\sqrt{t}}\int_1^t ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx = \lim_{t\to\infty}\frac{ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)}{\frac{1}{2\sqrt{t}}} = 2.$$

---

***Задание 6*** ***(8 баллов)***
Найти сумму ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}.$$

**Ответ: 2**

**Решение:**

Очевидно, данный ряд сходится. Используем свойство независимости суммы сходящегося ряда от перестановки его членов и формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}=\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\frac{5}{32}+\cdots=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\right)+\cdots$$
$$=$$
$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots\right)+\cdots=$$
$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots=2.$$

---

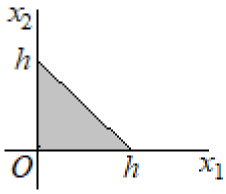
***Задание 7* (12 баллов)**

Найти объем $m$-мерной пирамиды $T_m$:

$$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0,\cdots,x_m\geq 0,\ x_1+\ x_2+\cdots+x_m\leq h.$$

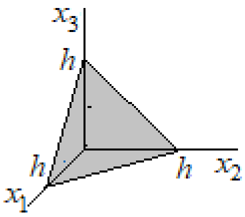
**Ответ:** $\frac{h^m}{m!}$

**Решение:**




Рассмотрим $k=2,\ V_2=\iint_S dx_1dx_2=\int_0^h dx_1\int_0^{h-x_1}dx_2=$

$$=\int_0^h(h-x_1)dx_1=-\left.\frac{(h-x_1)^2}{2}\right|_0^h=\frac{h^2}{2}=\frac{h^2}{2!},$$




$$k=3,\ V_3=\underset{V}{\iiint}dx_1dx_2dx_3=\int_0^h dx_1\int_0^{h-x_1}dx_2\int_0^{h-x_1-x_2}dx_3=$$

$$=\int_0^h dx_1\int_0^{h-x_1}(h-x_1-x_2)dx_2=-\int_0^h dx_1\left.\frac{(h-x_1-x_2)^2}{2}\right|_0^{h-x_1}=$$

$$=\int_0^h\frac{(h-x_1)^2}{2}dx_1=-\left.\frac{(h-x_1)^3}{6}\right|_0^h=\frac{h^3}{3!},$$

далее по индукции

$$k=m,\ V_m=\underset{V}{\iiint}dx_1dx_2\cdots dx_m=\int_0^h dx_1\int_0^{h-x_1}dx_2\ldots\int_0^{h-x_1-x_2-\ldots-x_{m-1}}dx_m=$$

$$=\int_0^h dx_1\int_0^{h-x_1}dx_2\ldots\int_0^{h-x_1-x_2-\ldots-x_{m-2}}(h-x_1-x_2-\ldots-x_{m-1})dx_{m-1}=\frac{h^m}{m!}.$$

---

***Задание 8*** ***(12 баллов)***
Найти действительные решения дифференциального уравнения

$$(y')^3 + \frac{2y'}{x^2} = 1 + \frac{2}{x^2} + \frac{6y}{x} + \frac{12y^2}{x^2} + \frac{8y^3}{x^3} + \frac{4y}{x^3}.$$

**Ответ:** $y = Cx^2 - x$.

**Решение:**
Умножаем все на $x^3$:

$$(xy')^3 + 2xy' = x^3 + 2x + 6yx^2 + 12y^2x + 8y^3 + 4y.$$

Преобразуем:

$$(xy')^3 + 2xy' = (x + 2y)^3 + 2(x + 2y).$$

Обозначим:

$$z = xy',\ t = x + 2y \ \Rightarrow\ z^3 + 2z = t^3 + 2t \ \Rightarrow\ (z - t)(z^2 + zt + t^2 + 2) = 0.$$

Действительному решению отвечает случай

$$z = t \ \Rightarrow\ xy' = x + 2y \ \Rightarrow\ y' = 1 + 2\frac{y}{x}.$$

Имеем однородное дифференциальное уравнение 1-го порядка, которое решается с помощью замены

$$y = tx,\ \ y' = t'x + t,$$

где $t = t(x)$ – новая функция; далее решаем

$$t'x + t = 1 + 2t \ \Rightarrow\ t'x = 1 + t \Rightarrow\ \frac{dt}{1+t} = \frac{dx}{x} \Rightarrow\ ln|1 + t| = lnCx \Rightarrow\ 1 + t = Cx.$$

Возвращаемся к искомой функции

$$y = Cx^2 - x.$$

---

***Задание 9*** ***(9 баллов)***
Дано линейное однородное дифференциальное уравнение порядка $n$ с постоянными действительными коэффициентами. Известно, что $x^{50}\sin^4(3x)$ – одно из решений этого уравнения. Найдите минимально возможное значение $n$.
**Ответ:** 255

**Решение:**
Данное частное решение можно преобразовать к виду

$$\frac{1}{8}x^{50}\cos 12x - \frac{1}{2}x^{50}\cos 6x + \frac{3}{8}x^{50}.$$

Для того, чтобы линейное однородное дифференциальное уравнение в качестве решения имело такой квазимногочлен, корнями его характеристического уравнения должны являться следующие числа: $\lambda_{1,2} = \pm 12i$ – корни кратности 51; $\lambda_{3,4} = \pm 6i$ – корни кратности 51; $\lambda_5 = 0$ – также корень кратности 51.
Получаем, что характеристическое уравнение должно иметь, по крайней мере, 51·5 корней (с учётом кратности), поэтому минимально возможное значение $n$ – это 255.

---

***Задание 10*** ***(10 баллов)***
Игроки $A$ и $B$ играют шахматный матч между собой. Игрок $A$ выигрывает у игрока $B$ партию с вероятностью 0,6. Для уравнивания шансов они договорились, что $A$ побеждает, если выигрывает три партии, а $B$ побеждает, если выигрывает две партии (ничьи не учитываются). Какова вероятность выигрыша каждого из игроков в матче?

**Ответ:** Вероятность выигрыша игрока *A* равна 0,4752. Вероятность выигрыша игрока *B* равна 0,5248.

**Решение:**

При любом исходе матч завершается после четырех результативных партий. Представим каждый исход в виде вектора, состоящего из нулей и единиц, соответствующих результату партий по порядку: 1 – партию выигрывает первый игрок, 0 – партию выигрывает второй игрок. Всего 16 возможных исходов, с учетом возможного досрочного окончания матча – 10. Используя формулу Бернулли, имеем:

$$P(A) = C_4^4(0{,}6)^4 + C_4^3(0{,}6)^3(0{,}4) = (0{,}6)^4 + 4(0{,}6)^3(0{,}4) = 0{,}4752$$

- вероятность победы в матче 1-го игрока;

$$P(B) = 1 - P(A) = 0{,}5248$$

- вероятность победы в матче 2-го игрока.

------------------------------------------------------------------------------------