



**ЧЕТВЕРТАЯ МЕЖДУНАРОДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ОЛИМПИАДА
БЛАГОВЕЩЕНСК – РОССИЯ, 16 марта 2024 г.**

Задание 1 (9 баллов)

Доказать неравенство

$$\left(1 + \frac{1}{4}\right) \left(1 + \frac{1}{8}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) < 2, \quad n \geq 2.$$

Задание 2 (11 баллов)

Вычислить неопределенный интеграл

$$I = \int \frac{\cos x + \sin x}{5 \cos^2 x - 2 \sin 2x + 2 \sin^2 x} dx.$$

Задание 3 (9 баллов)

Вычислить определенный интеграл

$$\int_0^1 \frac{x^{2023} - 1}{\ln x} dx.$$

Задание 4 (10 баллов)

Найти сумму числового ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}.$$

Задание 5 (9 баллов)

Найти все действительные решения уравнения

$$(2x^3 + x - 3)^3 = 3 - x^3.$$

Задание 6 (9 баллов)

Найти условный экстремум функции

$$u = xyz$$

при следующих уравнениях связи

$$xy + yz + zx = 9, \quad x + y + z = 6.$$

Задание 7 (10 баллов)

Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y^2 dx + (e^x - y) dy = 0.$$

Задание 8 (11 баллов)

Найти общее решение системы нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y' = \frac{z}{x}, \\ z' = \frac{z(y + 2z - 1)}{x(y - 1)}. \end{cases}$$

Задание 9 (11 баллов)

Вычислить определитель n -го порядка

$$\begin{vmatrix} 3 & 8 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 9 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 9 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 6 \end{vmatrix}.$$

Задание 10 (11 баллов)

Случайные величины ξ_1, ξ_2, ξ_3 независимы и равномерно распределены на отрезке $[0; 1]$. Найти вероятность $P(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 \leq x)$ при $x \geq 0$.