



第五届跨国大学生数学奥林匹克竞赛
布拉戈维申斯克-俄罗斯·2025年3月15日

1. (本题10分)

求函数

$$f_1(x) = \frac{\ln x}{2025} \quad \text{和} \quad f_2(x) = e^{2025x}$$

的图象的距离。(即在两个图象上各取一点P和Q, 求PQ的最小值。)

2. (本题10分)

计算闭合曲线 $x^3 + x^2 - y^2 = 0$ 所围成的区域的面积。

3. (本题10分)

计算二重积分

$$\iint_D (x + y) dx dy,$$

其中区域 D 由曲线 $xy = 1$, $xy = 9$, $y - x = 2$ 和 $x - y = 2$ 所围成, 并且 $x > 0$, $y > 0$ 。

4. (本题8分)

求二元二次方程组

$$\begin{cases} 34x^2 - 22xy + 5y^2 = 98, \\ 16x^2 + 2xy - 3y^2 = 0. \end{cases}$$

的实数解。

5. (本题10分)

求数列极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \cdot \left(\sqrt[n]{n + a^2} - \sqrt[n]{n} \right).$$

6. (本题8分)

求解行列式方程 $\Delta(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 8 & 4 & 2 & 2 & 1 \\ x & -8 & -4 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 0.$

7. (本题12分)

求微分方程

$$x^2yy'' - 2x^2y'^2 + xyy' + y^2 = 0.$$

的通解。

8. (本题12分)

求常微分方程组

$$\begin{cases} 2zy' = y^2 - z^2 + 1, \\ z' = z + y. \end{cases}$$

的通解。

9. (本题9分)

已知函数 $y = e^{2x} \sin 2x$, 计算高阶导数 $y^{(21)}(0)$ 。

10. (本题11分)

每次同时掷出 3 个骰子, 问需要投掷多少次, 才能使三个骰子点数都相同的情况(例如, 1-1-1、2-2-2...)至少出现一次的概率大于某个事先给定的数 $p \in (0,1)$? 若 $p = 0.5$, 则具体需要投多少次?