



第四届国际数学奥林匹克竞赛
布拉戈维申斯克-俄罗斯·2024年3月16日

1. (本题9分)

证明不等式

$$\left(1 + \frac{1}{4}\right)\left(1 + \frac{1}{8}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) < 2, \quad n \geq 2.$$

2. (本题11分)

求不定积分

$$I = \int \frac{\cos x + \sin x}{5 \cos^2 x - 2 \sin 2x + 2 \sin^2 x} dx.$$

3. (本题9分)

计算定积分

$$\int_0^1 \frac{x^{2023} - 1}{\ln x} dx.$$

4. (本题10分)

求数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$$

的和。

5. (本题9分)

求方程

$$(2x^3 + x - 3)^3 = 3 - x^3.$$

的所有实根。

6. (本题9分)

求函数

$$u = xyz$$

的条件极值，其中自变量 x, y, z 满足

$$xy + yz + zx = 9, \quad x + y + z = 6.$$

7. (本题10分)

求下列微分方程的通解：

$$y^2 dx + (e^x - y) dy = 0.$$

8. (本题11分)

求出下列非线性方程组的通解：

$$\begin{cases} y' = \frac{z}{x}, \\ z' = \frac{z(y + 2z - 1)}{x(y - 1)}. \end{cases}$$

9. (本题11分)

计算 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 3 & 8 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 9 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 9 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 6 \end{vmatrix}.$$

10. (本题11分)

随机变量 ξ_1, ξ_2, ξ_3 相互独立并且都在区间 $[0; 1]$ 上均匀分布。

求概率 $P(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 \leq x)$ ，其中 $x \geq 0$ 给定。